Пример. Найти асимптоты графика функции. И исследовать его поведение.

$$y = \frac{2x^3 - 50x^2 + 1}{x^2 - 4x - 32}$$

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2x^3 - 50x^2 + 1}{x^2 - 4x - 32}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 50x^2 + 1}{x^3 - 4x^2 - 32x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{50}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} - \frac{32}{x^2}} = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3 - 50x^2 + 1}{x^2 - 4x - 32} - kx\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3 - 50x^2 + 1}{x^2 - 4x - 32} - 2x\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3 - 50x^2 + 1 - 2x^2 + 8x^2 + 64}{x^2 - 4x - 32}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-42x^2 + 65}{x^2 - 4x - 32} = -42$$

Найдем вертикальные асимптоты:

$$x^2 - 4x - 32 = 0 \Leftrightarrow (x - 8)(x + 4) = 0$$

Исследуем поведение функции в окрестностях -4 и 8:

Вычислим значения числителя при данных значениях. Это -927 и -2175.

При значениях меньших -4 знаменатель будет больше нуля, посему предел слева:

$\lim_{x\to-4-0} \frac{2x^3-50x^2+1}{x^2-4x-32} = \left|\frac{-927}{+0}\right| = -\infty$

При значениях чуть больших -4 знаменатель будет меньше нуля, посему предел справа:

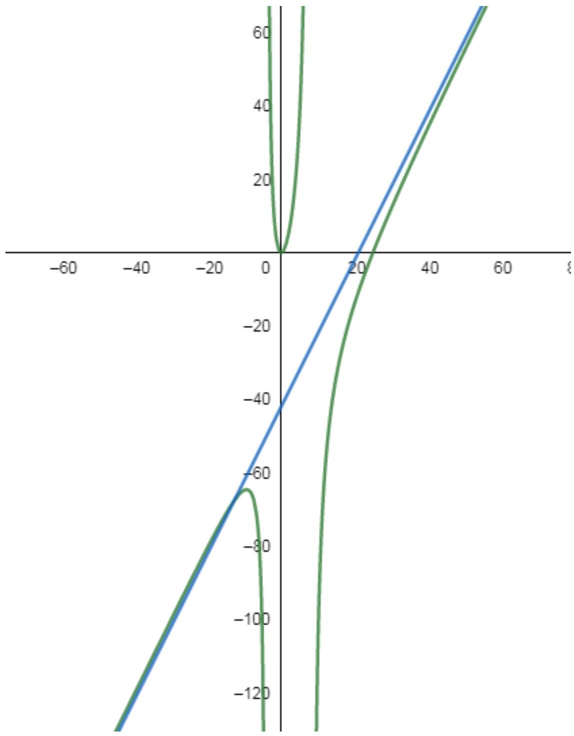
$\lim_{x\to-4+0} \frac{2x^3-50x^2+1}{x^2-4x-32} = \left|\frac{-927}{-0}\right| = +\infty$

При значениях чуть меньших 8 знаменатель будет меньше нуля, посему предел слева:

$\lim_{x\to8-0} \frac{2x^3-50x^2+1}{x^2-4x-32} = \left|\frac{-927}{-0}\right| = +\infty$

При значениях больших 8 знаменатель будет больше нуля, посему предел справа:

$\lim_{x\to8+0} \frac{2x^3-50x^2+1}{x^2-4x-32} = \left|\frac{-2175}{+0}\right| = -\infty$



Задания.

1. Найти асимптоты графика функции. И исследовать его поведение.

$$y = \frac{x^2 + 8}{x^2 - 16}$$

$$y = \frac{x^4 + 4}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

2. Используя определение производной, вычислить:

А) y', если $y(x) = \frac{1}{x^n}$, где $n \in \boldsymbol{N}$

Б) y', если $y(x) = \sqrt[n]{x}$, где $n \in \boldsymbol{N}$

3. Используя определение производной и свойства пределов, докажите для функций u(x) и v(x):

А) $(u + v)' = u' + v'$

Б) $(uv)' = u'v + uv'$